

1ÈRE ANNÉE COLLÈGE · SÉANCE 5

Inégalité triangulaire et médiatrice d'un segment

Le plus court chemin · Construire un triangle · $MA = MB$

Ce que nous allons apprendre

- L'inégalité triangulaire $AC \leq AB + BC$ et son cas d'égalité
- Savoir si un triangle peut être construit
- Encadrer la longueur du troisième côté
- La médiatrice : définition et construction au compas
- La propriété directe et la propriété réciproque
- Le cercle circonscrit à un triangle

Le chemin direct est le plus court

LA PROPRIÉTÉ

$$AC \leq AB + BC$$

Cas d'égalité

Si $B \in [AC]$: $AC = AB + BC$. Les points sont **alignés**.

Cas strict

Si $B \notin [AC]$: $AC < AB + BC$. Les points forment un **triangle**.

$AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 8$: comme $8 = 5 + 3$, $B \in [AC]$.

La condition d'existence

LA RÈGLE

Un triangle existe si et seulement si le **plus grand côté** est inférieur à la somme des deux autres.

Longueurs	Test	Conclusion
4 ; 5 ; 8	$8 < 4 + 5 = 9$	le triangle existe
3 ; 4 ; 7	$7 = 3 + 4$	triangle aplati : points alignés
2 ; 3 ; 6	$6 > 2 + 3 = 5$	construction impossible

Méthode et encadrement

- 1 Je repère le plus grand côté.
- 2 Je compare avec la somme des deux autres.
- 3 Je conclus par une phrase.

ENCADRER LE TROISIÈME CÔTÉ

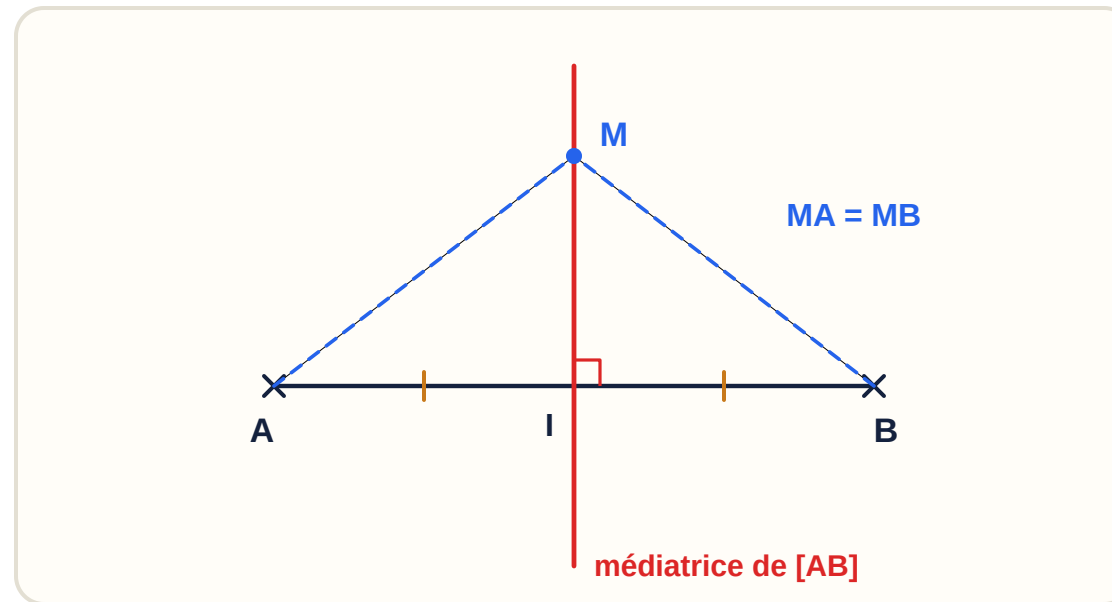
$$|AB - BC| \leq AC \leq AB + BC$$

Avec $AB = 7$ et $BC = 4$: $3 \leq AC \leq 11$.

Définition

À RETENIR

La médiatrice de $[AB]$ est la droite **perpendiculaire** à $[AB]$ en son **milieu**.



Les deux propriétés

PROPRIÉTÉ DIRECTE

Si M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors $MA = MB$.

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Si $MA = MB$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

médiatrice de $[AB] \iff$ points équidistants de A et B

La construction au compas

- 1 Je trace un arc de centre A et de rayon r (avec $r > \frac{AB}{2}$).
- 2 Je trace un arc de **même rayon** de centre B .
- 3 Les deux arcs se coupent en deux points : la droite qui les joint est la médiatrice.

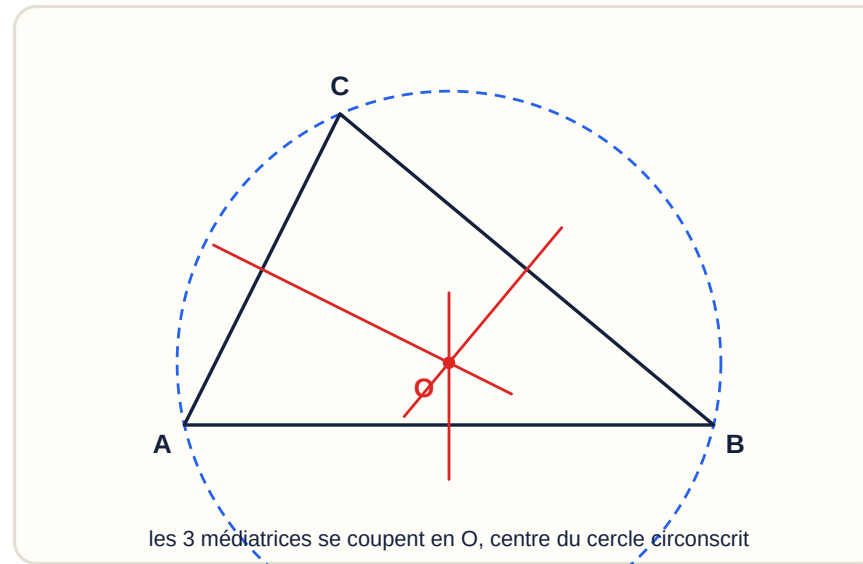
POURQUOI ÇA MARCHE

Les deux points d'intersection sont à égale distance de A et de B : ils sont donc sur la médiatrice.

Les trois médiatrices d'un triangle

PROPRIÉTÉ

Elles se coupent en un même point O , avec $OA = OB = OC$.



Justifier en trois temps

ON SAIT QUE...

M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

OR...

tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant de ses extrémités.

DONC...

$MA = MB$.

APPLICATION 1

Le triangle existe-t-il ?

Énoncé. $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 3$ cm. Peut-on construire ce triangle ?

- ➊ Le plus grand côté est $BC = 10$ cm.
- ➋ $AB + AC = 6 + 3 = 9$ cm.
- ➌ $10 > 9$: la construction est **impossible**.

APPLICATION 2

Utiliser la médiatrice

Énoncé. M et N vérifient $MA = MB$ et $NA = NB$, avec $M \neq N$. Que peut-on dire de la droite (MN) ?

CORRECTION

$MA = MB$ donc M est sur la médiatrice de $[AB]$ (propriété réciproque).

$NA = NB$ donc N y est aussi.

Deux points distincts déterminent une seule droite : (MN) **est** la médiatrice de $[AB]$.

L'essentiel de la séance

Ce que je dois savoir	En une phrase
Inégalité triangulaire	$AC \leq AB + BC$, égalité si $B \in [AC]$
Condition d'existence	plus grand côté < somme des deux autres
Encadrement	$ AB - BC \leq AC \leq AB + BC$
Médiatrice	perpendiculaire au segment en son milieu
Propriété	M sur la médiatrice $\iff MA = MB$