

1ÈRE ANNÉE COLLÈGE · SÉANCE 12

Bissectrices et hauteurs d'un triangle

Cercle inscrit · Orthocentre · Aire du triangle

Ce que nous allons apprendre

- La bissectrice d'un angle et sa construction au compas
- Les trois bissectrices et le cercle inscrit
- La hauteur issue d'un sommet et son pied
- Les trois hauteurs et l'orthocentre
- L'aire d'un triangle
- Le tableau des quatre droites remarquables

Définition et propriété

DÉFINITION

La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet qui le partage en **deux angles de même mesure**.

PROPRIÉTÉ

Tout point de la bissectrice est à **égale distance des deux côtés** de l'angle.

$$\widehat{AOB} = 70^\circ \text{ et } [Ox) \text{ bissectrice} \Rightarrow \widehat{AOx} = \widehat{xOB} = 35^\circ$$

La construction au compas

- 1 Je trace un arc de centre O : il coupe les deux côtés en M et N .
- 2 Je trace deux arcs de même rayon, centrés en M et en N ; ils se coupent en P .
- 3 La demi-droite $[OP)$ est la bissectrice de l'angle.

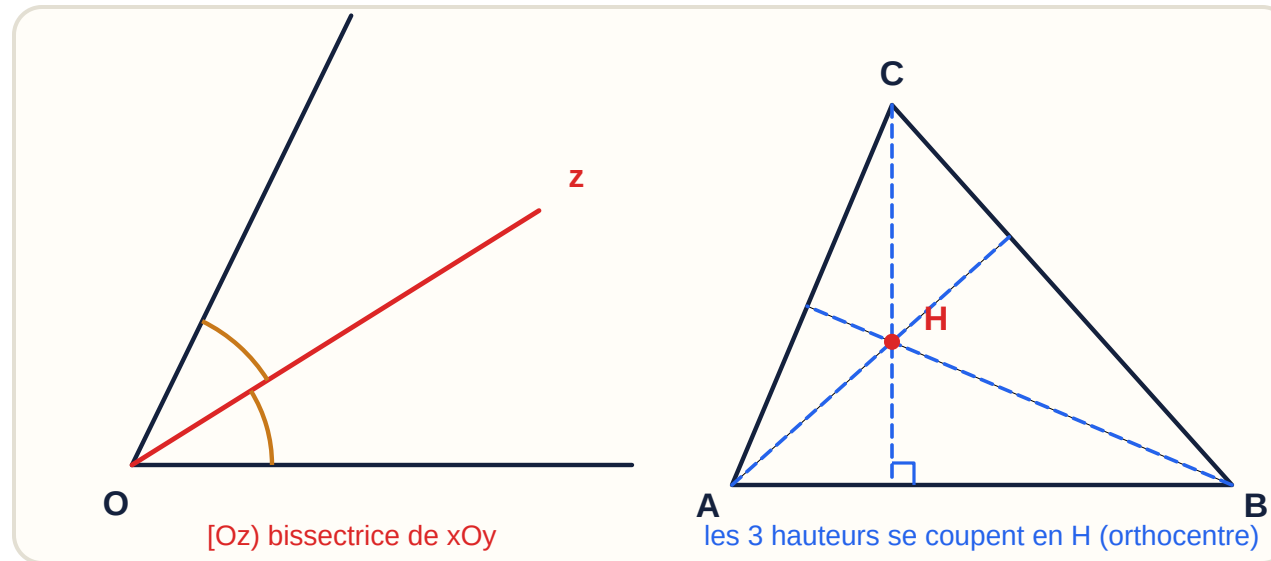
POURQUOI ÇA MARCHE

Le point P est à la même distance de M et de N : la figure est symétrique par rapport à $[OP)$.

Les trois bissectrices

PROPRIÉTÉ

Elles se coupent en un point I situé à égale distance des trois côtés : c'est le centre du **cercle inscrit**.



Perpendiculaire au côté opposé

DÉFINITION

La hauteur issue de A est la droite passant par A et **perpendiculaire** à (BC) . Le point H où elle coupe (BC) est le **pied** de la hauteur.

À NOTER

La longueur AH est la **distance de A à la droite (BC)** .

ATTENTION

Si $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ est obtus, le pied H se trouve **en dehors** du segment $[BC]$.

Les trois hauteurs se coupent

PROPRIÉTÉ

Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point :
l'orthocentre.

Triangle rectangle en A

L'orthocentre est le sommet A lui-même.

Triangle obtusangle

L'orthocentre se trouve **à l'extérieur** du triangle.

Base × hauteur, divisé par deux

FORMULE

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$BC = 8 \text{ cm et } AH = 5 \text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A} = \frac{8 \times 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

IMPORTANT

On peut choisir n'importe quel côté comme base, à condition de prendre **la hauteur correspondante** : l'aire ne change pas.

Les quatre droites remarquables

Droite	Définition	Point de concours
Médiatrice	$\perp$ au côté en son milieu	centre du cercle circonscrit
Bissectrice	partage l'angle en deux	centre du cercle inscrit
Hauteur	$\perp$ au côté opposé	orthocentre
Médiane	sommet $\rightarrow$ milieu opposé	centre de gravité

APPLICATION 1

Deux bissectrices et un angle

Énoncé. Dans ABC , $\hat{A} = 64^\circ$ et $\hat{B} = 52^\circ$. Les bissectrices de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ se coupent en I . Calculer $\widehat{AIB}$.

❶ $\widehat{IAB} = \frac{64}{2} = 32^\circ$.

❷ $\widehat{IBA} = \frac{52}{2} = 26^\circ$.

❸ Dans le triangle AIB : $\widehat{AIB} = 180 - 32 - 26 = 122^\circ$.

APPLICATION 2

Calculer une aire de deux façons

Énoncé. ABC est rectangle en A avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. Calculer la hauteur issue de A .

- 1 Avec les côtés de l'angle droit : $\mathcal{A} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.
- 2 Avec BC comme base : $\mathcal{A} = \frac{10 \times AH}{2}$.
- 3 $5 AH = 24$ donc $AH = 4,8$ cm.

L'essentiel de la séance

Ce que je dois savoir	En une phrase
Bissectrice	partage l'angle, points équidistants des côtés
Cercle inscrit	centre = intersection des bissectrices
Hauteur	$\perp$ au côté opposé, passe par le sommet
Orthocentre	intersection des trois hauteurs
Aire	$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$