

2ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 7

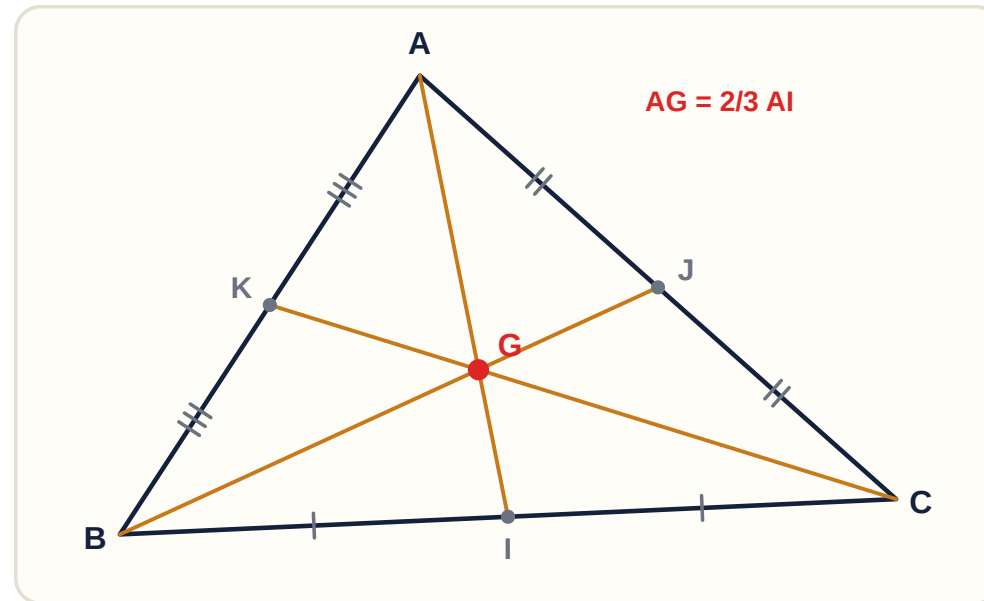
Droites remarquables dans un triangle

Médiatrices · Médianes · Hauteurs · Bissectrices

Ce que nous allons apprendre

- Les médiatrices et le cercle circonscrit
- Les médianes et le centre de gravité
- Les hauteurs et l'orthocentre
- Les bissectrices et le cercle inscrit
- Les cas particuliers (isocèle, équilatéral, rectangle)
- Rédiger une démonstration

Quatre familles de droites



Chaque famille est concourante en un point remarquable.

Le cercle circonscrit

PROPRIÉTÉ

Les trois médiatrices se coupent en O avec $OA = OB = OC$: c'est le centre du **cercle circonscrit**.

Triangle rectangle

O est le **milieu de l'hypoténuse**.

Triangle obtusangle

O est à **l'extérieur** du triangle.

Le centre de gravité

PROPRIÉTÉ

Les trois médianes se coupent en G , situé aux **deux tiers** de chaque médiane à partir du sommet.

LES FORMULES

$$AG = \frac{2}{3} AI \quad GI = \frac{1}{3} AI \quad AG = 2 GI$$

où I est le milieu de $[BC]$.

L'orthocentre

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) . Les trois hauteurs se coupent en l'**orthocentre**.

Rectangle en A

L'orthocentre est le sommet A .

Obtusangle

L'orthocentre sort du triangle.

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Le cercle inscrit

PROPRIÉTÉ

Les trois bissectrices se coupent en I , à égale distance des trois côtés : c'est le centre du **cercle inscrit**, tangent aux trois côtés.

RAYON DU CERCLE INSCRIT

C'est la distance de I à l'un des côtés.

Quand tout se confond

TRIANGLE ISOCÈLE EN A

La médiatrice de $[BC]$, la médiane issue de A , la hauteur issue de A et la bissectrice de $\hat{A}$ sont **confondues**.

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Les **quatre** points remarquables sont confondus en un seul point.

MÉTHODE

Rédiger une démonstration

ON SAIT QUE...

O est le point de concours des médiatrices de ABC .

OR...

ce point est équidistant des trois sommets.

DONC...

$OA = OB = OC$.

APPLICATION 1

Utiliser les deux tiers

Énoncé. G est le centre de gravité de ABC , I le milieu de $[BC]$ et $AG = 10$ cm. Calculer AI et GI .

- ❶ $AG = \frac{2}{3} AI$, donc $AI = \frac{3}{2} \times 10 = 15$ cm.
- ❷ $GI = AI - AG = 15 - 10 = 5$ cm.
- ❸ Vérification : $AG = 2GI$ ✓

APPLICATION 2

Deux façons de calculer une aire

Énoncé. ABC est rectangle en A , $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm et $BC = 15$ cm. Calculer la hauteur issue de A .

1 $\mathcal{A} = \frac{9 \times 12}{2} = 54 \text{ cm}^2.$

2 Avec BC comme base : $\mathcal{A} = \frac{15 \times AH}{2}.$

3 $AH = \frac{2 \times 54}{15} = 7,2 \text{ cm}.$

L'essentiel de la leçon

Droite	Définition	Point de concours
Médiatrice	$\perp$ au côté en son milieu	cercle circonscrit
Médiane	sommet $\rightarrow$ milieu opposé	centre de gravité
Hauteur	$\perp$ au côté opposé	orthocentre
Bissectrice	partage l'angle en deux	cercle inscrit

À NE PAS OUBLIER

$$AG = \frac{2}{3} AI \cdot \text{triangle rectangle} : r = \frac{\text{hypoténuse}}{2}$$