

2ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 8

Triangle et droites des milieux

Le théorème · Sa réciproque · Le parallélogramme des milieux

Ce que nous allons apprendre

- Le théorème des milieux
- Sa réciproque
- Choisir le bon théorème
- Rédiger « on sait que... or... donc... »
- Le parallélogramme des milieux
- Périmètre et aire du triangle des milieux

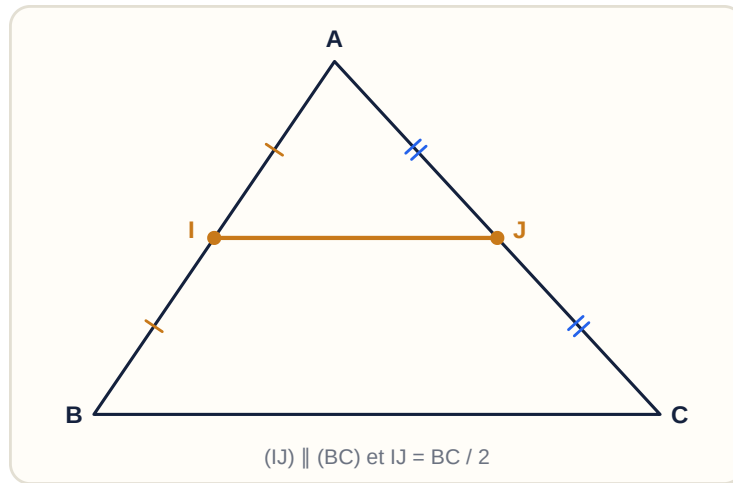
1 · LE THÉORÈME

La droite des milieux

THÉORÈME

Si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, alors

$$(IJ) \parallel (BC) \quad IJ = \frac{BC}{2}$$



1 · LE THÉORÈME

Un exemple rédigé

Énoncé. Dans ABC , I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, et $BC = 9$ cm.

ON SAIT QUE...

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.

OR...

la droite des milieux est parallèle au troisième côté et le segment en mesure la moitié.

DONC...

$(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = 4,5$ cm.

Démontrer qu'un point est un milieu

THÉORÈME RÉCIPROQUE

Dans un triangle, la droite qui passe par le **milieu d'un côté** et qui est **parallèle à un deuxième côté** coupe le **troisième en son milieu**.

I milieu de $[AB]$ et $(IJ) \parallel (BC) \Rightarrow J$ est le milieu de $[AC]$

Quel théorème utiliser ?

Ce que je connais	Ce que je cherche	Théorème
deux milieux	une longueur ou un parallélisme	le premier
un milieu et un parallélisme	un milieu	la réciproque

LE RÉFLEXE

Je repère d'abord **combien de milieux** l'énoncé me donne.

Toujours un parallélogramme

PROPRIÉTÉ

Dans un quadrilatère **quelconque**, les milieux des quatre côtés forment un **parallélogramme**.

- 1 Je trace la diagonale $[AC]$.
- 2 Dans ABC : $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = \frac{AC}{2}$.
- 3 Dans ACD : $(LK) \parallel (AC)$ et $LK = \frac{AC}{2}$.
- 4 Deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.

Moitié et quart

PROPRIÉTÉS

Si I, J, K sont les milieux des trois côtés :
chaque côté de IKJ vaut la **moitié** du côté correspondant,
son **périmètre** est divisé par 2, son **aire** par 4.

Périmètre 36 cm

→ 18 cm

Aire 24 cm²

→ 6 cm²

APPLICATION 1

Calculer des longueurs

Énoncé. ABC : $AB = 8$, $AC = 10$, $BC = 12$ cm. I , J , K sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

- 1 IJ est la moitié de BC : $IJ = 6$ cm.
- 2 JK est la moitié de AB : $JK = 4$ cm.
- 3 IK est la moitié de AC : $IK = 5$ cm.

APPLICATION 2

Utiliser la réciproque

Énoncé. Dans ABC , I est le milieu de $[AB]$ et la parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J . On donne $AC = 16$ cm. Calculer JC .

- ➊ I est un milieu et $(IJ) \parallel (BC)$.
- ➋ D'après la réciproque, J est le milieu de $[AC]$.
- ➌ Donc $JC = \frac{16}{2} = 8$ cm.

Trois pièges du chapitre

Erreur	Correction
$IJ = 2 BC$	$IJ = \frac{BC}{2}$: c'est la moitié
utiliser le théorème avec un seul milieu	il en faut deux , sinon c'est la réciproque
« l'aire est divisée par 2 »	elle est divisée par 4

L'essentiel de la leçon

Théorème	Hypothèses	Conclusion
Droite des milieux	I, J milieux	$(IJ) \parallel (BC), IJ = \frac{BC}{2}$
Réciproque	I milieu, $(IJ) \parallel (BC)$	J est le milieu de $[AC]$
Quadrilatère	milieux des 4 côtés	parallélogramme
Triangle des milieux	—	périmètre $\div 2$, aire $\div 4$