

2ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 9

Triangle rectangle et cercle

Milieu de l'hypoténuse · Médiane · Réciproques

Ce que nous allons apprendre

- Le cercle circonscrit à un triangle rectangle
- La médiane relative à l'hypoténuse
- Les deux réciproques
- Choisir la bonne propriété
- Les triangles isocèles cachés dans la figure
- Construire un triangle rectangle avec le cercle

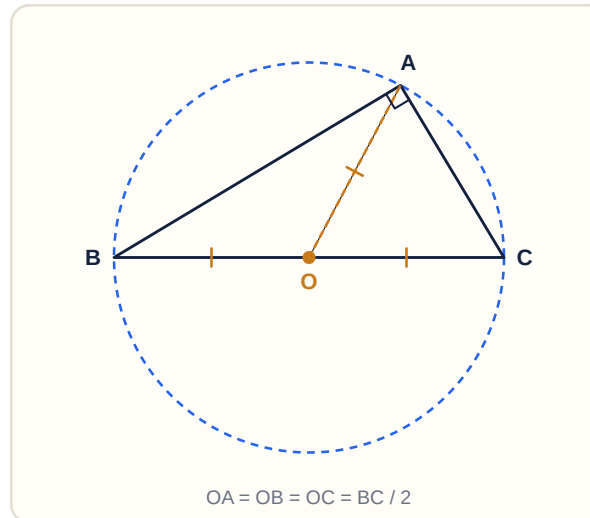
1 · PROPRIÉTÉ DIRECTE

Le centre est au milieu de l'hypoténuse

PROPRIÉTÉ

Si ABC est rectangle en A et O est le milieu de $[BC]$, alors

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$



Elle mesure la moitié de l'hypoténuse

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse : $AO = \frac{BC}{2}$.

Exemple. ABC rectangle en A , $BC = 10$ cm, O milieu de $[BC]$.

$AO = 5$ cm, et le rayon du cercle circonscrit vaut 5 cm.

Pour démontrer un angle droit

RÉCIPROQUE 1

Si A appartient au cercle de **diamètre** $[BC]$ (avec $A \neq B$, $A \neq C$), alors ABC est **rectangle en A** .

RÉCIPROQUE 2

Si la médiane issue de A mesure la moitié de $[BC]$, alors ABC est **rectangle en A** .

Quelle propriété utiliser ?

Ce que je sais	Ce que je cherche	Propriété
le triangle est rectangle	une longueur, le rayon	directe
A est sur le cercle de diamètre $[BC]$	un angle droit	réciroque 1
$AO = \frac{BC}{2}$, O milieu	un angle droit	réciroque 2

MÉTHODE

Rédiger la démonstration

ON SAIT QUE...

A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

OR...

si un point appartient au cercle de diamètre $[BC]$, le triangle est rectangle en ce point.

DONC...

ABC est rectangle en A .

Des triangles isocèles cachés

L'IDÉE

$OA = OB = OC$: les triangles OAB et OAC sont **isocèles en O** .

Conséquence

$$\widehat{OAB} = \widehat{B} \text{ et } \widehat{OAC} = \widehat{C}.$$

Rappel

Dans un triangle rectangle, $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Un triangle rectangle avec le cercle

Construire ABC rectangle en A avec $BC = 8$ cm et $AB = 5$ cm.

- 1 Je trace $[BC]$ de 8 cm et le cercle de diamètre $[BC]$.
- 2 Je trace l'arc de centre B et de rayon 5 cm.
- 3 Il coupe le cercle en A : le triangle ABC est rectangle en A .

APPLICATION 1

Angles dans un demi-cercle

Énoncé. $[BC]$ est un diamètre d'un cercle de rayon 5 cm, M est sur le cercle et $\widehat{MBC} = 35^\circ$.

- 1 M est sur le cercle de diamètre $[BC]$: BMC est rectangle en M .
- 2 $\widehat{MCB} = 90 - 35 = 55^\circ$.
- 3 $OM = 5$ cm (c'est un rayon).

APPLICATION 2

Démontrer avec la médiane

Énoncé. Dans ABC , O est le milieu de $[BC]$, $BC = 18$ cm et $AO = 9$ cm.
Que peut-on dire ?

CORRECTION

On sait que $AO = \frac{BC}{2}$ et que O est le milieu de $[BC]$.

Or, si la médiane issue de A mesure la moitié de $[BC]$, le triangle est rectangle en A .

Donc ABC est **rectangle en A** , et le rayon du cercle circonscrit vaut 9 cm.

L'essentiel de la leçon

Propriété	Énoncé
Directe	rectangle $\Rightarrow O$ milieu de l'hypoténuse
Médiane	$AO = \frac{BC}{2}$
Réciproque 1	A sur le cercle de diamètre $[BC] \Rightarrow$ rectangle
Réciproque 2	$AO = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ rectangle
Rayon	$r = \frac{\text{hypoténuse}}{2}$