

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 6

Le théorème de Pythagore

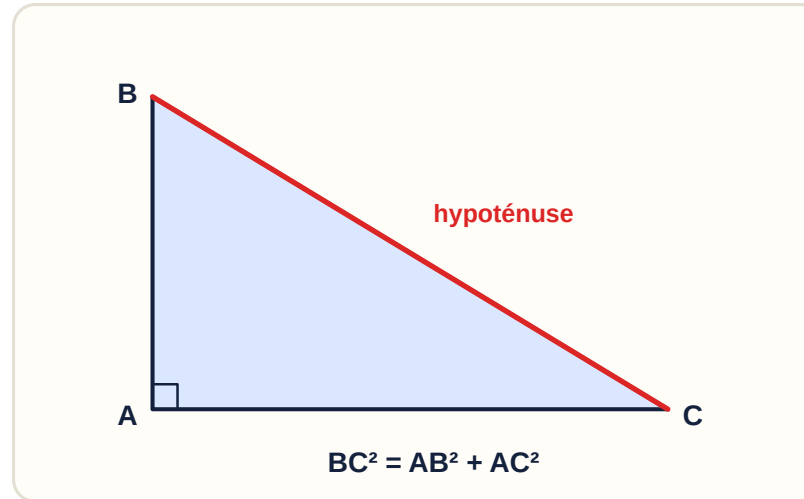
Rappels · Valeurs exactes · Solides · Repère

Ce que nous allons apprendre

- Le théorème, sa réciproque, sa contraposée
- Donner une valeur exacte avec une racine
- Les triplets pythagoriciens
- Pythagore dans les figures usuelles
- Pythagore dans les solides
- La distance dans un repère

1 · LE THÉORÈME

Et ses deux usages



THÉORÈME ET RÉCIPROQUE

Rectangle en $A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$. · $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow$ rectangle en A .

1 · LE THÉORÈME

Quelle opération ?

Je cherche...	Je fais...
l'hypoténuse	j' additionne les carrés
un côté de l'angle droit	je soustrais les carrés
à prouver un angle droit	je compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$

CONTRAPOSÉE

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, le triangle **n'est pas** rectangle.

Garder la racine

DEUX EXEMPLES

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \implies BC = \sqrt{34} \approx 5,83$$

$$BC^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \implies BC = 6\sqrt{2} \approx 8,49$$

DEUX FORMULES UTILES

Diagonale d'un carré de côté a : $a\sqrt{2}$. · Hauteur d'un triangle équilatéral de côté a : $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3 · TRIPLETS

À reconnaître d'un coup d'œil

Triplet	Multiples
(3 ; 4 ; 5)	(6 ; 8 ; 10), (9 ; 12 ; 15), (12 ; 16 ; 20)
(5 ; 12 ; 13)	(10 ; 24 ; 26)
(8 ; 15 ; 17) · (7 ; 24 ; 25)	(20 ; 21 ; 29)

GAIN DE TEMPS

Reconnaître un triplet évite tout calcul : le triangle est rectangle et la longueur est connue.

Où trouver le triangle rectangle ?

Rectangle

La diagonale se calcule avec les deux côtés.

Triangle isocèle

La hauteur coupe la base en son milieu.

LOSANGE

Les diagonales sont perpendiculaires :

$$c^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Avec $D = 16$ et $d = 12$: $c^2 = 64 + 36 = 100$, donc $c = 10$ cm.

Cube, cône, pyramide

Face d'un cube

$$d = a\sqrt{2}$$

Grande diagonale

$$D = a\sqrt{3}$$

Cône

$$g^2 = r^2 + h^2$$

LA MÉTHODE

Je repère un triangle rectangle **dans** le solide, puis j'applique le théorème.

La distance entre deux points

FORMULE

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple. $A(1 ; 2)$ et $B(5 ; 5)$.

1 $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9}.$

2 $AB = \sqrt{25} = 5.$

APPLICATION 1

Le triangle équilatéral

Énoncé. Un triangle équilatéral a un côté de 8 cm. Hauteur et aire ?

1 La hauteur coupe la base en son milieu : $h^2 = 64 - 16 = 48$.

2 $h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm.

3 $\mathcal{A} = \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \approx 27,7 \text{ cm}^2$.

APPLICATION 2

Un triangle dans le repère

Énoncé. $A(-2; 3)$, $B(4; 3)$, $C(4; -5)$. Nature du triangle ?

- ➊ $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = \sqrt{36 + 64} = 10$.
- ➋ $10^2 = 100$ et $6^2 + 8^2 = 100$.
- ➌ D'après la réciproque, le triangle est **rectangle en B** .

L'essentiel de la leçon

Situation	Ce que j'écris
Rectangle en A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Chercher l'hypoténuse	j'additionne
Chercher un autre côté	je soustrais
Prouver un angle droit	je compare les deux calculs
Repère	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$