

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 8

Angle inscrit et angle au centre

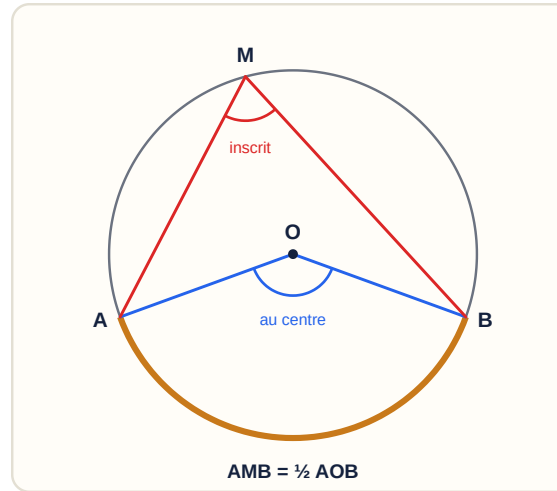
Le théorème · Le même arc · Les polygones réguliers

Ce que nous allons apprendre

- Reconnaître un angle inscrit et un angle au centre
- Le théorème de l'angle inscrit
- Deux angles inscrits qui interceptent le même arc
- Le cas du diamètre
- Les polygones réguliers
- Rédiger une démonstration

1 · LES DÉFINITIONS

Où est le sommet ?



À RETENIR

Angle au centre : sommet **au centre** du cercle. · **Angle inscrit** : sommet **sur** le cercle.

2 · LE THÉORÈME

La moitié, toujours la moitié

THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT

$$\widehat{\text{inscrit}} = \frac{\widehat{\text{au centre}}}{2} \quad \text{soit} \quad \widehat{\text{au centre}} = 2 \times \widehat{\text{inscrit}}$$

CONDITION

Les deux angles doivent intercepter le **même arc**.

Exemple. $\widehat{AOB} = 80^\circ$ donne $\widehat{AMB} = 40^\circ$; $\widehat{AMB} = 35^\circ$ donne $\widehat{AOB} = 70^\circ$.

Des angles inscrits égaux

PROPRIÉTÉ

Deux angles inscrits qui interceptent le **même arc** ont la **même mesure** :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

POURQUOI ?

Chacun vaut la moitié du **même** angle au centre : ils sont donc égaux entre eux.

Exemple. Si $\widehat{AMB} = 42^\circ$, alors tout autre angle inscrit sur le même arc mesure aussi 42° .

Un angle droit garanti

PROPRIÉTÉ

Si $[AB]$ est un **diamètre**, l'angle au centre vaut 180° , donc tout angle inscrit vaut $\frac{180}{2} = 90^\circ$.

CONSÉQUENCE

Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est **rectangle** : on retrouve la propriété vue en 2ème année.

Les rayons sont égaux

ASTUCE TRÈS UTILE

$OA = OB = r$: le triangle OAB est **isocèle en O** .

Exemple. $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Calculer $\widehat{OAB}$.

1 OAB est isocèle en O : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

2 $\widehat{OAB} = \frac{180 - 110}{2} = 35^\circ$.

Côtés égaux, angles égaux

Polygone	Côtés	Angle au centre	Angle du polygone
triangle équilatéral	3	120°	60°
carré	4	90°	90°
pentagone	5	72°	108°
hexagone	6	60°	120°

Les deux formules

POUR n CÔTÉS

$$\text{angle au centre} = \frac{360^\circ}{n} \qquad \text{angle du polygone} = \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$$

RETROUVER n

$$\text{Angle au centre de } 36^\circ : n = \frac{360}{36} = 10 \text{ côtés.}$$

MÉTHODE

Rédiger une démonstration

- 1 **On sait que...** $\widehat{AMB}$ est inscrit et $\widehat{AOB}$ est au centre, sur le même arc.
- 2 **Or...** un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre.
- 3 **Donc...** $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$.

APPLICATION 1

Un hexagone dans un cercle

Énoncé. Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 6 cm.
Côté et périmètre ?

- 1 L'angle au centre vaut $\frac{360}{6} = 60^\circ$.
- 2 Les deux rayons sont égaux : le triangle est isocèle avec un angle de 60° , donc **équilatéral**.
- 3 Le côté mesure 6 cm et le périmètre 36 cm.

APPLICATION 2

Une équation sur un cercle

Énoncé. Deux angles inscrits sur le même arc mesurent $3x - 10$ et $2x + 15$. Calculer x .

- 1 Même arc $\Rightarrow$ angles égaux : $3x - 10 = 2x + 15$.
- 2 $x = 25$.
- 3 Chaque angle mesure 65° , et l'angle au centre 130° .

L'essentiel de la leçon

Situation	Ce que j'écris
Inscrit et au centre	$\text{inscrit} = \frac{\text{centre}}{2}$
Même arc	angles inscrits égaux
Diamètre	angle inscrit = 90°
Deux rayons	triangle isocèle
Polygone régulier	$\frac{360^\circ}{n}$ et $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$