

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 12

Repère dans le plan

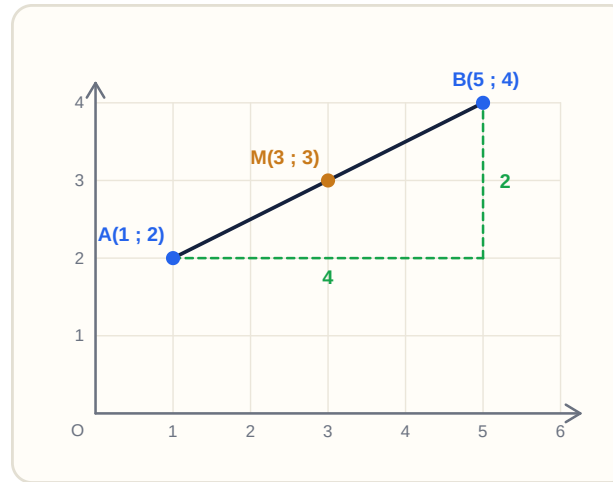
Coordonnées · Milieu · Distance · Nature d'une figure

Ce que nous allons apprendre

- Repère orthogonal et repère orthonormé
- Les coordonnées du milieu d'un segment
- La distance entre deux points
- Les symétries en coordonnées
- Le quatrième sommet d'un parallélogramme
- Déterminer la nature d'une figure

1 · LE REPÈRE

Une origine et deux axes



TROIS MOTS À DISTINGUER

Quelconque : axes sécants. · **Orthogonal** : axes perpendiculaires. ·
Orthonormé : perpendiculaires **et** même unité.

Une moyenne, deux fois

FORMULE

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple. $A(-3; 5)$ et $B(7; 1)$.

❶ $x_I = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$

❷ $y_I = \frac{5 + 1}{2} = 3, \text{ donc } I(2; 3).$

Retrouver une extrémité

FORMULE INVERSE

$$x_B = 2x_I - x_A \qquad y_B = 2y_I - y_A$$

Exemple. $I(3; 5)$ est le milieu de $[AB]$ et $A(1; 2)$.

- ❶ $x_B = 6 - 1 = 5$.
- ❷ $y_B = 10 - 2 = 8$, donc $B(5; 8)$.

Pythagore en coordonnées

REPÈRE ORTHONORMÉ

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple. $A(1 ; 2)$ et $B(5 ; 5)$.

❶ $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}.$

❷ $AB = 5.$

Trois transformations en coordonnées

Symétrique de $M(x; y)$	Coordonnées
par rapport à l'axe des abscisses	$(x; -y)$
par rapport à l'axe des ordonnées	$(-x; y)$
par rapport à l'origine	$(-x; -y)$

EXEMPLE

Pour $M(4; -3)$: $(4; 3)$, $(-4; -3)$ et $(-4; 3)$.

Les diagonales se coupent en leur milieu

CRITÈRE

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Exemple. $A(1 ; 1)$, $B(5 ; 2)$, $C(6 ; 6)$. Trouver D .

- 1 Milieu de $[AC]$: $(3,5 ; 3,5)$.
- 2 $x_D = 7 - 5 = 2$ et $y_D = 7 - 2 = 5$: $D(2 ; 5)$.

Quatre réflexes

Je constate...	Je conclus...
deux longueurs égales	triangle isocèle
trois longueurs égales	triangle équilatéral
$BC^2 = AB^2 + AC^2$	triangle rectangle
diagonales de même milieu	parallélogramme

APPLICATION 1

Un triangle isocèle et rectangle

Énoncé. $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$, $C(5 ; 0)$. Nature du triangle ?

- ➊ $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ et $BC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.
- ➋ $AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$, donc $AC^2 = 40 = 20 + 20$.
- ➌ Le triangle est **isocèle et rectangle en B** .

APPLICATION 2

Un point équidistant

Énoncé. Trouver le point M de l'axe des abscisses équidistant de $A(1; 3)$ et $B(5; 1)$.

- ➊ $M(x; 0)$ avec $MA^2 = MB^2 : (x - 1)^2 + 9 = (x - 5)^2 + 1$.
- ➋ $x^2 - 2x + 10 = x^2 - 10x + 26$, donc $8x = 16$.
- ➌ $x = 2$: le point est $M(2; 0)$.

L'essentiel de la leçon

Formule	Écriture
Milieu	$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$
Extrémité	$x_B = 2x_I - x_A$
Distance	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Symétrique / origine	$(-x ; -y)$
Parallélogramme	diagonales de même milieu