

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 15

Triangles isométriques et triangles semblables

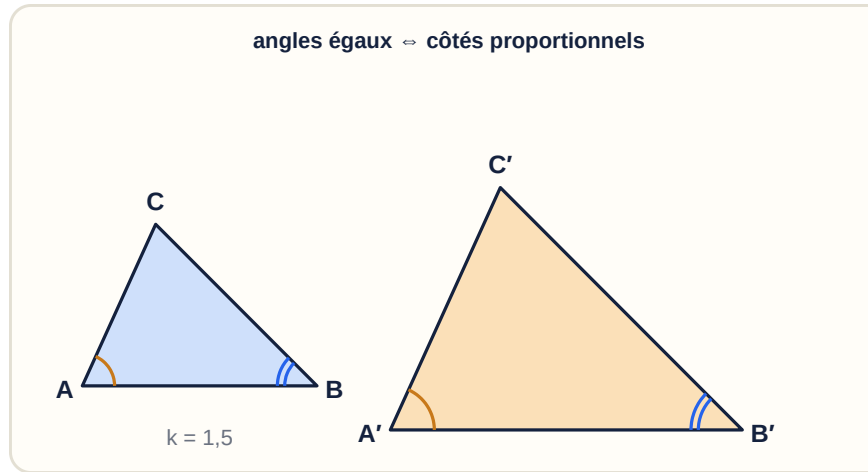
Les trois cas · Le rapport k · Longueurs et aires

Ce que nous allons apprendre

- Reconnaître deux triangles isométriques
- Les trois cas d'isométrie
- Reconnaître deux triangles semblables
- Le rapport de similitude k
- L'effet sur le périmètre et sur l'aire
- Rédiger une démonstration

1 · ISOMÉTRIQUES

Même forme, même taille



DÉFINITION

Deux triangles sont **isométriques** lorsque leurs trois côtés sont égaux deux à deux : ils sont **superposables**.

Comment le prouver

Cas	Ce qu'il faut vérifier
1 ^{er} cas	les trois côtés égaux deux à deux
2 ^e cas	deux côtés et l' angle compris entre eux
3 ^e cas	un côté et les deux angles adjacents

À SAVOIR

Une translation, une symétrie ou une rotation donne toujours un triangle **isométrique** au triangle de départ.

Même forme, taille différente

DÉFINITION

Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont égaux deux à deux.

PROPRIÉTÉ ÉQUIVALENTE

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

LE PLUS PRATIQUE

Deux angles égaux suffisent : le troisième l'est automatiquement, car la somme vaut 180° .

4 · LE RAPPORT k

Ce qui change, ce qui ne change pas

Grandeur	Multipliée par
Longueurs	k
Périmètre	k
Aire	k^2
Angles	1 : ils sont inchangés

CAS PARTICULIER

Si $k = 1$, les triangles sont **isométriques** : l'isométrie est une similitude de rapport 1.

Quatre étapes de rédaction

- 1 Je repère les **angles égaux** (angle commun, opposés par le sommet, alternes-internes...).
- 2 J'annonce : « deux angles égaux deux à deux, donc les triangles sont **semblables** ».
- 3 J'écris les rapports des côtés **homologues**, dans le bon ordre.
- 4 Je calcule la longueur cherchée par **produit en croix**.

Un exemple complet

Énoncé. $\widehat{A}$ est commun aux triangles ABC et AMN , et $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$.
On a $AB = 6$, $AM = 9$, $BC = 4$.

- ➊ Deux angles égaux : les triangles sont **semblables**.
- ➋ $k = \frac{AM}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5$.
- ➌ $MN = 4 \times 1,5 = 6$.

Deux configurations classiques

CONFIGURATION DE THALÈS

Les droites parallèles donnent des angles égaux : les deux triangles sont **semblables**.

TRIANGLES RECTANGLES

Deux triangles rectangles qui ont un **angle aigu égal** sont semblables : c'est ce qui justifie que $\cos$, $\sin$ et $\tan$ ne dépendent que de l'angle.

APPLICATION 1

La droite parallèle

Énoncé. $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et (MN) parallèle à (BC) . $AM = 3$, $AB = 7,5$, $BC = 10$. Calculer MN .

- ❶ $\widehat{A}$ commun et $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$: triangles semblables.
- ❷ $k = \frac{3}{7,5} = 0,4$.
- ❸ $MN = 10 \times 0,4 = 4$.

APPLICATION 2

Périmètre et aire

Énoncé. Deux triangles semblables ont des périmètres de 12 cm et 30 cm. L'aire du petit est 8 cm².

1 $k = \frac{30}{12} = 2,5.$

2 L'aire est multipliée par $k^2 = 6,25.$

3 Aire du grand : $8 \times 6,25 = 50 \text{ cm}^2.$

L'essentiel de la leçon

Notion	Ce que je retiens
Isométriques	trois côtés égaux, superposables
Semblables	mêmes angles, côtés proportionnels
Suffisant	deux angles égaux deux à deux
Longueurs et périmètre	$\times k$
Aire	$\times k^2$