

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · LEÇON 17

Géométrie dans l'espace

Sphère et boule · Sections · Volumes · Rapport k

Ce que nous allons apprendre

- La sphère et la boule
- La section d'une sphère par un plan
- Les sections des solides usuels
- Les volumes à connaître
- Agrandissement et réduction
- Réduire un cône ou une pyramide

Une surface, un solide

À NE PAS CONFONDRE

La **sphère** est la **surface** : les points à la distance R du centre. La **boule** est le **solide plein** : les points à une distance $\leq R$.

LES DEUX FORMULES

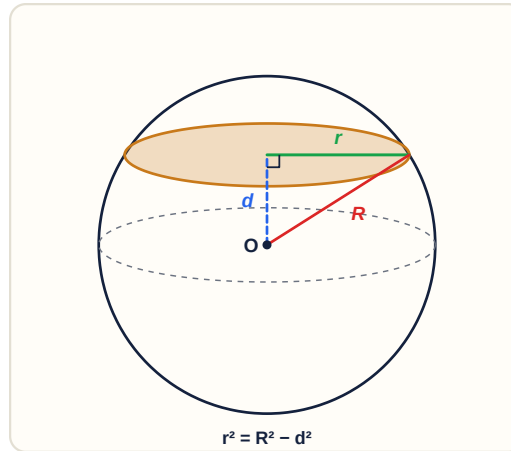
$$\mathcal{A}_{\text{sphère}} = 4\pi R^2$$

$$\mathcal{V}_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

GRAND CERCLE

C'est l'intersection de la sphère avec un plan passant par le **centre** ; son rayon vaut R .

Encore Pythagore



FORMULE

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Trois cas selon la distance

Distance d au centre	La section est...
$d = 0$	un grand cercle de rayon R
$d < R$	un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$
$d = R$	un point (le plan est tangent)
$d > R$	rien : aucune intersection

EXEMPLE

$R = 13$ cm et $d = 5$ cm : $r = \sqrt{169 - 25} = 12$ cm.

Selon le plan de coupe

Solide	Plan parallèle à la base	Plan perpendiculaire
Cylindre	cercle de même rayon	rectangle
Cône	cercle réduit	triangle
Pyramide	polygone semblable à la base	triangle
Pavé droit	rectangle	rectangle

Six formules à connaître

Solide	Volume
Pavé droit	$L \times l \times h$
Prisme droit	$\mathcal{B} \times h$
Cylindre	$\pi r^2 h$
Pyramide	$\frac{\mathcal{B} \times h}{3}$
Cône	$\frac{\pi r^2 h}{3}$
Boule	$\frac{4}{3} \pi R^3$

La règle des trois puissances

Grandeur	Multipliée par
Longueurs	k
Aires	k^2
Volumes	k^3
Angles	1 : inchangés

VOCABULAIRE

$k > 1$: agrandissement. · $0 < k < 1$: réduction.

Réduire un cône

- 1 Je calcule $k = \frac{\text{hauteur du petit}}{\text{hauteur totale}}$.
- 2 Les longueurs de la section se multiplient par k .
- 3 L'aire se multiplie par k^2 , le volume par k^3 .

EXEMPLE

Cône de hauteur 12 cm et rayon 5 cm, coupé à 4 cm du sommet : $k = \frac{1}{3}$, le rayon de la section vaut $\frac{5}{3}$ cm et le petit volume est $\frac{1}{27}$ du grand.

APPLICATION 1

Un cône coupé

Énoncé. Cône de rayon 9 cm et de hauteur 12 cm, coupé à 8 cm du sommet. Volume du petit cône ?

1 Grand cône : $\mathcal{V} = \frac{\pi \times 81 \times 12}{3} = 324\pi \text{ cm}^3.$

2 $k = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, donc $k^3 = \frac{8}{27}.$

3 Petit cône : $324\pi \times \frac{8}{27} = 96\pi \approx 301,6 \text{ cm}^3.$

APPLICATION 2

Retrouver le rayon

Énoncé. Une boule a pour volume $288\pi \text{ cm}^3$. Calculer son rayon puis l'aire de la sphère.

- ➊ $\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi$, donc $R^3 = 216$.
- ➋ $R = 6 \text{ cm}$.
- ➌ $\mathcal{A} = 4\pi \times 36 = 144\pi \approx 452 \text{ cm}^2$.

L'essentiel de la leçon

Situation	Ce que j'écris
Aire d'une sphère	$4\pi R^2$
Volume d'une boule	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Section d'une sphère	$r = \sqrt{R^2 - d^2}$
Cône et pyramide	volume divisé par 3
Rapport k	aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$