



Limites et continuité — Cours

2ème Bac · Limites et continuité

1. Continuité

f est **continue** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, et continue sur un intervalle I si elle l'est en tout point de I .

- Somme, produit, quotient (dénominateur non nul) et composée de fonctions continues sont continues.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$ et v est continue en ℓ , alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = v(\ell)$.

Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la fonction égale à f et valant ℓ en a est le prolongement par continuité de f en a .

2. Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. L'image d'un segment $[a; b]$ est un segment $[m; M]$.

f continue et strictement croissante sur	$f(I)$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{b^-} f[$
$]a; +\infty[$	$] \lim_{a^+} f; \lim_{+\infty} f[$

3. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a; b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

Corollaire : si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a; b[$.

Dichotomie

On encadre la solution α en coupant l'intervalle en deux à chaque étape.

4. Fonction réciproque

Si f est continue et strictement monotone sur I , elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. Sa réciproque f^{-1} est continue sur J , de même monotonie que f , et $(C_{f^{-1}})$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la droite $y = x$.

5. Fonction racine n -ième

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur lui-même ; sa réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \quad (x, y \geq 0) \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$$

Puissance rationnelle : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ pour $x > 0$.

6. Fonction arctangente

$\tan$ est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est $\arctan$: $\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$ et $y \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- $\arctan$ est impaire, strictement croissante, $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$.
- Pour $x > 0$: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.