



Structures algébriques — Cours

2ème Bac · Structures algébriques

1. Loïs de composition interne

Une **loi de composition interne** $*$ sur E associe à tout couple $(a; b)$ de E^2 un élément $a * b$ de E .

- **Associative** : $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- **Commutative** : $a * b = b * a$.
- **Élément neutre** e : $a * e = e * a = a$.
- **Symétrique** de a : a' tel que $a * a' = a' * a = e$.
- *** distributive** sur $\top$: $a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$ (et à droite).

2. Groupes

$(G, *)$ est un **groupe** si $*$ est associative, admet un neutre et si tout élément admet un symétrique. Il est **commutatif** (abélien) si $*$ est commutative.

Exemples : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{U}, \times)$ où $\mathbb{U} = \{z : |z| = 1\}$.

Sous-groupe

$H \subset G$ non vide est un sous-groupe si $\forall a, b \in H, a * b' \in H$.

3. Morphismes

$f : (E, *) \rightarrow (F, \top)$ est un **morphisme** si $f(a * b) = f(a) \top f(b)$. Un morphisme bijectif est un **isomorphisme**.

L'image d'un groupe par un morphisme est un groupe. Exemple : $\ln : (]0; +\infty[, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ est un isomorphisme.

4. Anneaux et corps

$(A, *, \top)$ est un **anneau** si $(A, *)$ est un groupe commutatif, $\top$ est associative et distributive sur $*$. Il est **unitaire** si $\top$ admet un neutre, **commutatif** si $\top$ l'est.

Un **corps** est un anneau unitaire commutatif où tout élément non nul admet un symétrique pour $\top$.

Exemples : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$.

5. Espaces vectoriels réels

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si $(E, +)$ est un groupe commutatif et la loi externe vérifie : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $1 \cdot u = u$. Exemple : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de base $(1; i)$.