



Espaces vectoriels réels — Cours

2ème Bac · Espaces vectoriels

1. Définition

Un **espace vectoriel réel** est un ensemble E muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$ (de $\mathbb{R} \times E$ dans E) tels que :

- $(E, +)$ est un **groupe commutatif** (élément neutre 0_E) ;
- pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$; $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
 $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$; $1 \cdot u = u$.

Exemples : $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, l'ensemble $\mathcal{V}_3$ des vecteurs de l'espace, l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Règles de calcul

$$\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } u = 0_E ; (-1)u = -u.$$

2. Sous-espaces vectoriels

Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** si : $F \neq \emptyset$ (en général on vérifie $0_E \in F$) et, pour tous $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v \in F$.

Exemple : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ (c'est la droite vectorielle engendrée par $(1, 2)$). En revanche $\{(x, y) \mid x + y = 1\}$ n'en est pas un (0 n'y est pas).

3. Combinaisons linéaires, familles génératrices

Un vecteur u est **combinaison linéaire** de $u_1, \dots, u_n$ s'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$.

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E en est une combinaison linéaire.

4. Familles libres, bases, dimension

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **libre** si : $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Sinon elle est **liée**.

Une **base** de E est une famille libre et génératrice. Tout vecteur s'écrit alors de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de la base (ce sont ses **coordonnées**).

Si E admet une base à n éléments, toutes ses bases ont n éléments : n est la **dimension** de E .

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, base canonique $((1, 0), (0, 1))$; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.
- Dans un espace de dimension n , une famille libre de n vecteurs est une base.

Critère dans $\mathbb{R}^2$

Deux vecteurs $u(a, b)$ et $v(c, d)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(u, v) = ad - bc \neq 0$.