



Logique et raisonnement — Cours

Tronc commun · Logique et raisonnement

1. Propositions

Une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai (V), soit faux (F), mais pas les deux.

Exemples : « $2 + 3 = 5$ » est vraie ; « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est fausse.

2. Connecteurs logiques

- **Négation** $\overline{P}$ (non P) : vraie si P est fausse.
- **Conjonction** $P \wedge Q$ (P et Q) : vraie si les deux sont vraies.
- **Disjonction** $P \vee Q$ (P ou Q) : vraie si au moins l'une est vraie.
- **Implication** $P \Rightarrow Q$: fausse uniquement si P est vraie et Q fausse.
- **Équivalence** $P \Leftrightarrow Q$: vraie si P et Q ont la même valeur de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \quad \overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Implication et contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

3. Quantificateurs

- $\forall$: « pour tout ». $\exists$: « il existe ». $\exists!$: « il existe un unique ».
- Négation : $\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \overline{P(x)}$ et $\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{P(x)}$.

4. Types de raisonnement

Raisonnement direct

On part de P vraie et on déduit Q .

Raisonnement par contraposée

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on montre $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Exemple : montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Contraposée : si n est impair, $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire de ce qu'on veut montrer et on aboutit à une contradiction.

Raisonnement par disjonction des cas

Exemple : $n(n+1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étudier n pair puis n impair).

Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition « $\forall x, P(x)$ » est fausse, il suffit d'un x qui ne la vérifie pas.

Raisonnement par équivalence

On transforme l'énoncé par des équivalences successives.

Raisonnement par récurrence

Pour montrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$: on vérifie $P(n_0)$ (initialisation), puis on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité).

Exemple : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.