



Logique et raisonnement — Série d'exercices

Tronc commun · Logique et raisonnement

Exercice 1

Donner la valeur de vérité puis la négation de chaque proposition :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$

Correction

1. Vraie. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.
2. Fausse (car $x^2 + 1 \geq 1$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$.
3. Vraie (prendre $m = n + 1$). Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$.

Exercice 2

Montrer par contraposée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair alors n est impair.

Correction

Contraposée : si n est pair alors n^2 est pair. Si $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ est pair. D'où le résultat.

Exercice 3

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Correction

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \neq 0$, fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p pair : $p = 2k$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q est pair. Donc p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit l'irréductibilité.

Exercice 4

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est pair (disjonction des cas).

Correction

Si $n = 2k$: $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$, pair. Si $n = 2k + 1$:
 $n^2 + n = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1)$, pair.

Exercice 5

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Correction

Initialisation : $n = 1$, $1 = 1^2$. Hérédité : supposons $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Alors $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $x \neq -2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Correction

Par contraposée : si $\frac{x+1}{x+2} = 1$ (avec $x \neq -2$), alors $x + 1 = x + 2$, soit $1 = 2$, impossible. Donc l'égalité n'est jamais vraie : la proposition est vraie.