



Arithmétique dans $\mathbb{N}$ — Cours

Tronc commun · Arithmétique dans $\mathbb{N}$

1. Multiples et diviseurs

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. On dit que b **divise** a (ou que a est un **multiple** de b) s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$. On note $b \mid a$.

Exemples : $7 \mid 63$ car $63 = 9 \times 7$; les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Propriétés

- Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (a + b)$ et $d \mid (a - b)$ (si $a \geq b$).
- Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

2. Nombres pairs et impairs

Un entier n est **pair** s'il s'écrit $n = 2k$; il est **impair** s'il s'écrit $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

- La somme de deux nombres de même parité est paire ; la somme d'un pair et d'un impair est impaire.
- Le produit de deux impairs est impair ; n et n^2 ont la même parité.
- $n(n + 1)$ est toujours pair (produit de deux entiers consécutifs).

3. Critères de divisibilité

Divisible par	Critère
2	chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8
3	somme des chiffres divisible par 3
4	nombre formé par les deux derniers chiffres divisible par 4
5	chiffre des unités 0 ou 5
9	somme des chiffres divisible par 9

4. Nombres premiers

Un entier naturel $p \geq 2$ est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et p .

Les premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Décomposition : tout entier $n \geq 2$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme produit de facteurs premiers.

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Tester si un nombre est premier

On teste la divisibilité par les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$. Exemple : 97 n'est divisible ni

par 2, ni 3, ni 5, ni 7 (et $11^2 > 97$) : 97 est premier.

5. PGCD et PPCM

Le **PGCD** de a et b est le produit des facteurs premiers communs, chacun avec le **plus petit** exposant. Le **PPCM** est le produit de tous les facteurs premiers, chacun avec le **plus grand** exposant.

Exemple : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$: $\text{PGCD} = 2 \times 3 = 6$ et $\text{PPCM} = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$.

Pour tous a, b : $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$. Si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, on dit que a et b sont **premiers entre eux**.